Apuntes del curso Oceanografía Dinámica I

Karina Ramos Musalem

Última actualización: 9 de enero de 2026

Estas notas no abarcan el temario completo del curso Oceanografía Dinámica I (Posgrado en Oceanografía Física, CICESE); solo comprenden los temas que impartí en el cuatrimestre 2026-I. Las notas se irán completando conforme avance el cuatrimestre. La idea tampoco es que sean un libro ni mucho menos, solo son mi apoyo para la clase.

Los subtemas no los escogí yo, así viene el temario.

Contenido

1 Repasos

1.1 Un repaso de matemáticas

1.1.1 Conceptos vectoriales

1. Un vector tiene dirección y magnitud y puede ser descrito por una flecha que apunta en la dirección asignada de tamaño igual a su magnitud (Figura 1).

   Faltan los dibujitos del pizarrón

2. Un vector se representa en coordenadas cartesianas como $\boldsymbol{v} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$, donde a, b, c son las componentes en las direcciones x, y, z del vector $\boldsymbol{v}$.

   1. Las entidades $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ también son vectores que apuntan en las direcciones x, y, z, respectivamente, y tienen magnitud 1.
   2. Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ forman una base.
   3. La magnitud de un vector es su “longitud”, y está dada por

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

(norma).

Ejercicio: Dado el vector $\hat{\jmath} = 0\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + 0\hat{k}$, muestra que $\|\hat{\jmath}\| = 1$.

4. El producto punto entre dos vectores $\boldsymbol{v}_1 = a_1\hat{\imath} + b_1\hat{\jmath} + c_1\hat{k}$ y $\boldsymbol{v}_2 = a_2\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + c_2\hat{k}$ se define como:

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

1. El producto punto es un escalar.
2. El valor del producto punto es $\|\boldsymbol{v}_1\|\ \|\boldsymbol{v}_2\| \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los vectores.
3. El producto punto de un vector con otro es la proyección del primer vector en el segundo multiplicado por la magnitud del segundo.
4. Cualquier vector puede normalizarse utilizando su magnitud para convertirse en un vector unitario (de magnitud 1):

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

5. El producto punto de cualquier vector con un vector unitario es la proyección de ese vector en la dirección del vector unitario (piensa en la sombra que generaría una lámpara en el plano de los dos vectores que alumbra perpendicularmente al vector unitario).
6. El producto cruz entre dos vectores es un vector y puede escribirse como el determinante:

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2)\hat{\imath} - (a_1c_2 - c_1a_2)\hat{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}.$$

7. La magnitud del producto cruz es

$$\|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\| = \|\boldsymbol{v}_1\|\ \|\boldsymbol{v}_2\| \sin(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre los vectores.

8. La dirección del producto cruz es perpendicular a los dos vectores originales, o equivalentemente, perpendicular al plano sobre el que yacen los dos vectores originales (¡Recuerda la regla de la mano derecha! Ésta será muy importante para decirnos en qué dirección giran los flujos).

1.1.2 Operadores vectoriales

1. El gradiente de una función $f(\boldsymbol{r})$, donde $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, se define como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}.$$

2. El gradiente es un vector, pero en este caso la función f no es un vector.
3. El gradiente es función de las coordenadas espaciales.

4. Cada término del gradiente es la tasa de cambio en una dirección dada, asumiendo que no cambiamos de posición respecto a las otras dos coordenadas. Por ejemplo, considera que hay una fábrica que produce un olor sulfuroso que disminuye conforme nos alejamos de la fábrica. Una persona en A experimenta una tasa de reducción del olor relativamente grande conforme se mueve en dirección x, pero una tasa de reducción relativamente pequeña si se mueve en dirección y. Por lo tanto, la componente x del gradiente es relativamente grande y la componente y del gradiente es más pequeña.
5. **Ejercicio:**
   - Asume que en el ejemplo anterior de la fábrica el olor disminuye con la distancia de acuerdo a la ecuación

   $$O = \frac{A}{r^2},$$

   donde

   $$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

   Da la ecuación para el gradiente para cualquier punto (x, y), asumiendo que el origen $(0, 0)$ está en el centro de la fábrica.
   - Evalúa el gradiente en el punto $(2, 0)$. ¿Cómo se comparan las componentes en $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ y cómo ilustran el hecho de que el olor disminuye más rápido si nos movemos en x que en y?
6. La ecuación $f(x, y, z) = f(\boldsymbol{r}) = C$, donde C es una constante, define una superficie en el espacio.
7. El gradiente de una función $f(x, y, z)$ evaluado en un punto específico (x_0, y_0, z_0) es un vector perpendicular a la superficie $f(x, y, z) = C$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0).
8. La velocidad de un objeto es una cantidad vectorial cuya magnitud es la rapidez del objeto y su dirección es la dirección de movimiento del objeto.
9. El **operador** gradiente puede verse como un vector,

   $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}.$$

   Por lo que el gradiente de una función es el operador gradiente aplicado a esa función.
10. La divergencia de un vector $\boldsymbol{v}$ (como la velocidad, por ejemplo) es el producto punto del operador gradiente con el vector:

    $$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

11. La divergencia es una cantidad escalar porque es un producto punto.
12. La divergencia del gradiente de una función se conoce como el operador Laplaciano y también es una cantidad escalar:

$$\nabla \cdot (\nabla f(\boldsymbol{r})) \equiv \nabla^2 f(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Así, el operador Laplaciano es:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

13. Interpretación física de la divergencia
14. El rotacional de un vector es el producto cruz del operador gradiente con el vector:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

15. Interpretación física del rotacional
16. **Ejercicios:**
    Asume que f es una función escalar y $\boldsymbol{v}$ un vector. ¿Cuáles de las siguientes operaciones son válidas? Para las operaciones válidas di si el resultado será un vector o un escalar.
    1. $\nabla \times \boldsymbol{v}$
    2. $\nabla \times f$
    3. $\nabla \times (\nabla f)$
    4. $\nabla \times (\nabla \cdot \boldsymbol{v})$
    5. $\nabla(\nabla^2 f)$
    6. $\nabla \cdot (\nabla^2 f)$
    7. $(\nabla f) \times (\nabla f)$
    8. $(\nabla \times \nabla) \cdot \boldsymbol{v}$

1.1.3 Teoremas integrales

1. **Teorema de Gauss o de la divergencia**
   Sea V una región en el espacio con frontera ∂V. El teorema de Gauss dice que la integral sobre el volumen de la divergencia $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ del campo $\boldsymbol{F}$ sobre el volumen V y la integral de superficie de $\boldsymbol{F}$ sobre la frontera ∂V de V están relacionadas por

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a}.$$

   Físicamente, esto quiere decir que si no hay fuentes o sumideros del campo $\boldsymbol{F}$ dentro de la región del espacio V, la densidad del campo en esa región del espacio solo puede cambiar si hay un flujo hacia adentro o hacia afuera de la región a través de la frontera ∂V.

2. **Teorema de Stokes**
   El teorema de Stokes relaciona la integral sobre una superficie abierta con la integral de línea alrededor de la curva frontera de esa superficie. Sea A una superficie abierta cuya curva frontera es C. Escojamos un lado de la superficie para ser el exterior. Sea ds un elemento de la curva frontera cuya magnitud es la longitud del elemento y cuya dirección es tangente a la curva. El

sentido positivo de la tangente es tal que, cuando lo vemos desde el exterior de la superficie en la dirección de la tangente, el interior queda a la izquierda. Entonces el teorema establece que

$$\int_A (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot d\boldsymbol{A} = \int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Esto significa que la integral de superficie del rotacional del campo vectorial $\boldsymbol{u}$ es igual a la integral de línea de $\boldsymbol{u}$ alrededor de la curva frontera. La integral de un vector $\boldsymbol{u}$ alrededor de una curva cerrada C se conoce como "la circulación de $\boldsymbol{u}$ en C".

Ejercicio corto:

1. Si $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$, escribir la velocidad $\boldsymbol{v}$, y la aceleración $\boldsymbol{a}$.
2. Demostrar que $\hat{u} \cdot \dot{\hat{u}} = 0$ para $|\hat{u}| = 1$.

1.2 Movimiento circular uniforme (MCU) y aceleración centrípeta

El *movimiento circular uniforme* ocurre cuando una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio constante R con rapidez constante v. La dirección de la velocidad cambia continuamente, aunque su magnitud permanezca constante.

Algunas relaciones básicas son:

- Periodo: T (tiempo en dar una vuelta)
- Frecuencia: $f = \frac{1}{T}$
- Velocidad angular: $\omega = 2\frac{\pi}{T} = 2\pi f$
- Rapidez: $v = \omega R$

En forma vectorial, si la rotación es alrededor de un eje definido por el vector $\boldsymbol{\omega}$, la velocidad angular está dada por:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

En MCU siempre hay aceleración porque la dirección de $\boldsymbol{v}$ cambia. Esa aceleración apunta hacia el centro (radial hacia adentro).

1.2.1 Ejercicio

Una partícula se mueve en el plano xy con $\boldsymbol{r} = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$.

1. Deriva $\boldsymbol{v}$ y verifica que $|\boldsymbol{v}|$ es constante.
2. Muestra que $\boldsymbol{v}$ es perpendicular a $\boldsymbol{r}$.

1.3 Aceleraciones radiales (en movimiento curvilíneo)

En un movimiento sobre el plano, es útil descomponer la aceleración en:

- una componente **tangencial** (cambia la rapidez)
- una componente **radial** o **normal** (cambia la dirección)

Si el radio de curvatura instantáneo es R y la rapidez es v:

$$a_r = \frac{v^2}{R}.$$

En coordenadas polares (r, θ), la aceleración general es:

$$\boldsymbol{a} = \left(d\dot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(rd\dot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}.$$

Para MCU: $\dot{r} = 0$, $d\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$, $d\dot{\theta} = 0$:

$$\boldsymbol{a} = -r\omega^2\hat{r}.$$

La aceleración radial existe aunque la rapidez sea constante; refleja el cambio de dirección de la velocidad.

1.3.1 Ejercicio 1 (curvatura conocida)

Un auto toma una curva de radio $R = 50$ m a $v = 15$ m/s.

1. Calcula la aceleración radial.
2. Interpreta qué significa físicamente.

Solución:

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{50} = \frac{225}{50} = 4.5\ \mathrm{m/s^2}.$$

Interpretación: es la aceleración requerida para "doblar", apuntando al centro de la curva.

1.3.2 Ejercicio 2 (polares → MCU)

Sea $r(t) = 10$ m constante y $\theta(t) = 0.2t$ (rad).

1. Identifica ω.
2. Calcula $\boldsymbol{a}$ en polares.

Solución:

$\omega = 0.2$ rad/s.

$\boldsymbol{a} = -r\omega^2\hat{r} = -10(0.2)^2\hat{r} = -0.4\hat{r}\ \mathrm{m/s^2}.$

1.4 Fuerza centrípeta

La *fuerza centrípeta* es la fuerza neta radial hacia el centro necesaria para mantener el movimiento circular (o curvilíneo) con radio de curvatura R.

Por segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = ma_r = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R.$$

"Centrípeta" no es un tipo nuevo de fuerza: puede ser tensión, fricción, gravedad, empuje, etc. Lo "centrípeto" describe la dirección de la fuerza neta.

1.5 Momento angular

Para una partícula de masa m, el momento angular $\boldsymbol{L}$ se define como:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v}).$$

cuya dirección es perpendicular al plano formado por $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$ y su magnitud es $L = mrv\sin(\theta)$, donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$.

La torca (momento de fuerza) respecto al origen es:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}.$$

y satisface:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}.$$

El momento angular mide “cuánta rotación” tiene el movimiento respecto a un punto. Cambia sólo si hay una torca externa neta (análogo a la fuerza y el momento lineal).

1.6 Conservación del momento angular

Si la torca externa neta sobre un sistema respecto a un punto es cero:

$$\boldsymbol{\tau}_{\{ext\}} = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L} = \text{cte}.$$

1.6.1 Caso típico: fuerza central

Si $\boldsymbol{F}$ siempre es paralela a $\boldsymbol{r}$ (fuerza radial), entonces:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0,$$

y por lo tanto $\boldsymbol{L}$ se conserva. Geométricamente, si $\boldsymbol{L}$ es constante, el movimiento ocurre en un plano perpendicular a $\boldsymbol{L}$.

1.6.2 Ejemplo 1 (partícula en fuerza central)

Una partícula se mueve bajo una fuerza $\boldsymbol{F} = f(r)\hat{r}$.

1. Muestra que $\boldsymbol{\tau} = 0$.
2. Concluye que $\boldsymbol{L}$ es constante.

Solución: Como $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0 \longrightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0.$$

1.6.3 Opcionales

- MCU: Si R se duplica con ω constante, ¿cómo cambian v y a_r?
- Aceleración radial: Une ciclista describe una curva con $R = 20$ m y $a_r = 3$ m/s^2. Encuentra v.
- Fuerza centrípeta: ¿Qué μ_s se requiere para tomar una curva de radio R a velocidad v sin derrapar?
- Momento angular: Calcula $\boldsymbol{L}$ para $\boldsymbol{r} = (1, 2, 3)$ y $\boldsymbol{v} = (4, 0, -1)$ (masa m simbólica).
- Explica por qué un satélite en una órbita elíptica se mueve más rápido en perigeo que en apogeo.